ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ :

ανώμαλο σημείο

Αν $f: B_0(z_0, r) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη στο $B_0(z_0, r) = \Delta(z_0; 0, r)$ τότε αυτή αναπτύσσεται σε σειρά Laurent μορφής

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^n = \dots + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \dots$$

Ο συντελεστής b_{-1} του αναπτύγματος τύπου λέγεται ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0 και συμβολίζεται $Res_{z_0}(f)$

Οι συντελεστές της σειράς Laurent δίνονται από:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

← όπου αυτό προκύπτει από το γενικευμένο τύπο του Cauchy, που είναι:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

, με γ: κύκλος (θετ. προσ.) κέντρου z_0 και ακτίνας $R < r$.

Για $n = -1$, ο τύπος παραπάνω είναι:

$$b_{-1} = Res_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz$$

- Εάν η f δεν παρουσιάζει κάποια ανωμαλία στο z_0 ή αν η ανωμαλία της f στο z_0 να αίρεται τότε η σειρά Laurent με κέντρο z_0 είναι η σειρά Taylor (δηλ. περιέχει μόνο ολόμορφο μέρος) και τότε $Res_{z_0}(f) = 0$

- Εάν f ολόμορφη $\forall z : |z| > r$ δηλ. στο $\Delta(z_0; 0, \infty)$ τότε f αναπτύσσεται σε σειρά Laurent κέντρου $z_0 = 0$

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z)=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+1}$ στους πόλους της.

ΛΥΣΗ

Πόλοι της f τα σημεία 2 και -1

Αναπτύσσουμε την f σε σειρά Laurent στο δακτύλιο $\Delta(z_0;0,r)$

α) Για τον πόλο $z=2$.

Η απόσταση του 2 από τον άλλο πόλο (-1) είναι $d(2,-1)=|2+1|=3$. Άρα, αναπτύσσουμε την f κατά Laurent στο δακτύλιο $\Delta(2;0,3) \Rightarrow z: 0<|z-2|<3$.

$\frac{1}{|z-2|}<\frac{1}{3}<1$, και έτσι:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-2)+3}=\frac{1/3}{1+\frac{z-2}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}$$

Άρα,

$$f(z)=\underbrace{\frac{\overset{b_{-1}}{1}}{z-2}}_{\text{κανονικό μέρος}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}}_{\text{ολόμορφο μέρος}} \Rightarrow b_{-1}=\operatorname{Res}_{z_0=2}(f)=1$$

β) Για τον πόλο $z=-1$

$d(-1,2)=|-3|=3$. Άρα αναπτύσσουμε την f κατά Laurent στο δακτύλιο $\Delta(-1;0,3) \Rightarrow z: 0<|z+1|<3$

$\frac{1}{|z+1|}<\frac{1}{3}<1$ και έτσι:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+1)-3}=\frac{-1/3}{1-\left(\frac{z+1}{3}\right)}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}.$$

Άρα,

$$f(z)=\underbrace{\frac{\overset{b_{-1}}{1}}{z+1}}_{\text{κανονικό μέρος}}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}}_{\text{ολόμορφο μέρος}} \Rightarrow b_{-1}=\operatorname{Res}_{z_0=-1}(f)=1.$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_{\gamma} \frac{e^z}{(z+1)^3} dz \quad \text{όπου } (\gamma): |z| = 3.$$

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι $\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0}(f)$, z_0: ανώμαλο

οπότε αρκεί να το $\operatorname{Res}_{z_0}(f)$ με $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^3}$

Το ανώμαλο σημείο είναι το $z_0 = -1$.
Θα αναπτύξουμε λοιπόν την f κατά Laurent στο δακτύλιο $\Delta(-1;0,\infty)$ αφού έχουμε ένα ανώμαλο σημείο.

$\Delta(-1;0,\infty) = \{z : 0 < |z+1| < \infty\}$

Έχουμε $e^z = e^{-1}e^{z+1} = e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z+1)^n}{n!} =$

$$= \frac{1}{e} + \frac{z+1}{e} + \frac{(z+1)^2}{2!e} + \frac{(z+1)^3}{3!e} + \cdots$$

άρα, η $f(z)$ αναπτύσσεται ως εξής:

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3} = \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{(z+1)^3} + \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{2!e}\cdot\frac{1}{z+1} + \frac{1}{3!e} + \frac{1}{4!e}(z+1) + \cdots$$

Έτσι,

$$\operatorname{Res}_{z_0=-1}(f(z)) = \frac{1}{2!e} = \frac{1}{2e}$$

Άρα,

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z}{(z+1)^3} dz = 2\pi i \frac{1}{2e} = \frac{\pi i}{e}$$

Αν z_0 πόλος της f τάξης n τότε η συνάρτηση $g(z) = f(z)(z-z_0)^n$ ολόμορφη στο $B(z_0,R)$. Παίρνοντας έναν ομόκεντρο κύκλο μέσα στο δίσκο $B(z_0,R)$, δηλ. $0<r<R$ όπου r: ακτίνα του κύκλου τότε ισχύει

$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma g(z)/(z-z_0)^n\,dz =$$

$$\overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z_0) \overset{\text{συνεχ.}}{=} \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0} g^{(n-1)}(z) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(f(z)(z-z_0)^n\right)^{(n-1)}$$

για $n=1$ έχουμε $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z\to z_0}\left(f(z)(z-z_0)\right)$,

για $n=2$ έχουμε $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z\to z_0}\left(f(z)(z-z_0)^2\right)'$ ... κλπ

<u>Παράδειγμα 3</u>

Να βρείτε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z+1)}$ στους πόλους της

<u>ΛΥΣΗ</u>

<u>Πόλοι</u>: 1 και -1 $\Rightarrow$ f ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus\{\pm1\}$.

Το σημείο 1 πόλος $2^{\text{ης}}$ τάξεως

Το σημείο -1 πόλος $1^{\text{ης}}$ τάξεως

Άρα, για το σημείο $z_0=1$.

$$\mathrm{Res}_1(f) = \lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left((z-1)^2\cdot f(z)\right) = \lim_{z\to1}\left(\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z+1}\right]\right) = \lim_{z\to1}\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{4}$$

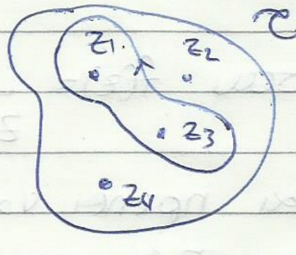
και για το σημείο $z_0=-1$

$$\mathrm{Res}_{-1}(f) = \lim_{z\to-1}\frac{z}{(z-1)^2} = -\frac{1}{4}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω τ τόπος στο μιγαδικό επίπεδο και f μερόμορφη συνάρτηση (δηλ. f παντού ολόμορφη εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος πόλων) στον τόπο τ. Αν $z_1, z_2, \dots, z_k$ είναι πόλοι της f στον τόπο για κάθε τμηματικά λεία κλειστή καμπύλη γ (μηδενομοτοπική στον τ) όπου δε διέρχεται από τους πόλους της f τότε ισχύει:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{k} I(\gamma, z_n)\, \mathrm{Res}_{z_n}(f).$$



Παράδειγμα 4.

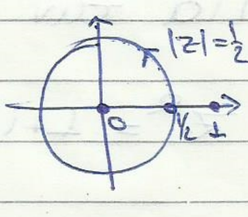
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \oint_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-1)}\,dz \quad , \ \gamma: \text{κύκλος } |z| = \frac{1}{2}.$$

ΛΥΣΗ

Έστω $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z-1)}$, ορισμένη στο $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$.

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{z^2(z-1)} = \infty = \lim_{z\to 1}\frac{e^z}{z^2(z-1)}$$



Άρα, τα 0 και 1 πόλοι της f

f ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$

Το 1 εξωτερικό σημείο της καμπύλης γ άρα σίγουρα θα έχει $I(\gamma,1)=0$.

Το $0 \in \gamma^{\circ}$ και άρα αφού είναι τάξης 2

$$\mathrm{Res}_{z=0}(f) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{1!}(z-0)^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to 0}\left(z^2 f(z)\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{ze^z - 2e^z}{(z-1)^2} = -2 \quad \text{και } I(\gamma,0) = 1$$

Άρα $I = \oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}_{z=0}(f) = 2\pi i(-2) = -4\pi i$

Πόρισμα: Επιλέγουμε συνειδητά να παίρνουμε τα σημεία που ανήκουν στο εσωτερικό της καμπύλης, όπου αυτά τα σημεία πόλοι της f

Ασκηση

Να υπολογιστει το ολοκλήρωμα

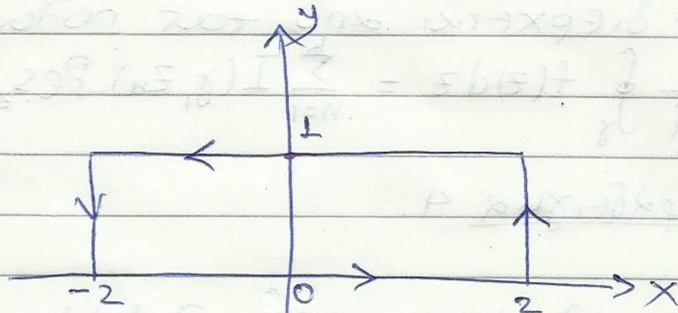
$$I = \oint_\gamma \frac{dz}{z^4-2z^2+4}, \quad \gamma: \text{το συνορο ορθογωνιου χωριου}$$

που ορίζεται απο τις ευθειες $x=-2$, $x=2$, $y=0$, $y=1$

ΛΥΣΗ

Εστω $f(z) = \dfrac{1}{z^4-2z^2+4}$

και πρεπει να βραμε το Π.Ο της f



$z^4-2z^2+4=0$ Θετω $z^2=w$ άρα παιρναμε

$w^2-2w+4=0$

$w = \dfrac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3} \Rightarrow z^2 = 1 \pm i\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow z^2 = 1+i\sqrt{3}$ ή $z^2 = 1-i\sqrt{3}$

Για την 1η εξίσωση:

$$z^2 = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\pi/3}{2} + i\sin\frac{2k\pi+\pi/3}{2}\right), \ k=0,1$$

$$\Rightarrow z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad z_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Για την 2η εξίσωση ομοίως

$$\overline{z_0} = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \overline{z_1} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Τα z_0 και $\overline{z_1}$ πολοι της f και ανήκουν στο εσωτερικο της καμπύλης η οποία είναι ολόμορφη πανω και στο εσωτερικο της γ.

Τότε,

$$I = \oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z_0}(f) + \operatorname{Res}_{\overline{z_1}}(f) \right) \quad (1)$$

• z_0 έχει πολ/τα 1

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z\to z_0} \left((z-z_0) f(z) \right) = \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{z^4-2z^2+4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)'}{(z^4-2z^2+4)'} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{4z(z^2-1)} = \frac{1}{2\sqrt{6}(-1+i\sqrt{3})}$$

• $\overline{z_1}$ έχει πολ/τα 1.

$$\operatorname{Res}_{\overline{z_1}}(f) = \lim_{z\to \overline{z_1}} \left((z-z_0) f(z) \right) = \ldots = \frac{1}{2\sqrt{6}(1+i\sqrt{3})}.$$

Άρα, στην (1) είναι $I = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Άσκηση

Έστω (γ): $z(t) = 3\cos t + i\sin t$, $\forall t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

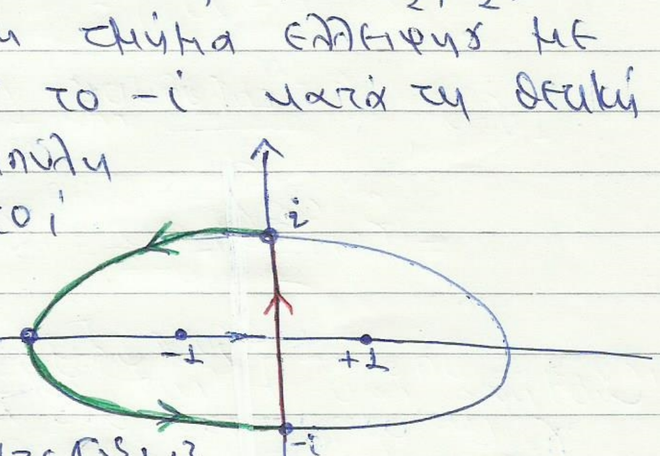
$$\oint_\gamma (1-z^2)^{-1}\,dz.$$

Λύση

Προφανώς η παραμετρική παράσταση

$z(t) = x(t) + i\,y(t) = 3\cos t + i\sin t$, $\forall t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

δηλώνει ότι η γ είναι τμήμα έλλειψης με αρχή το i και πέρας το $-i$ κατά τη θετική φορά. Έστω τώρα η καμπύλη με αρχή το $-i$ και πέρας το i δηλ. το ευθ. τμήμα γ' όπου $\gamma' + \gamma = \Gamma$, Γ: κλειστή με (γ'): $z(t) = it$, $t \in [-1, 1]$.



Ας είναι $f(z) = (1-z^2)^{-1}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$

με $-1 \in \Gamma$ και $+1 \notin \Gamma$ και -1 πόλος της f

Τότε: $$\int_\gamma \frac{dz}{(1-z^2)} = \int_\Gamma \frac{dz}{(1-z^2)} - \int_{\gamma'} \frac{dz}{(1-z^2)}$$

$$= \int_{\Gamma} \frac{dz}{(1-z)(1+z)} - \int_{\gamma'} \frac{dz}{1-z^2} =$$

$$= 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{-1}(f) - \int_{-1}^{1} \frac{i\,dt}{1+t^2} = 2\pi i \frac{1}{2} - i\left[\operatorname{Arctan} t\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \pi i - \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) i = \frac{\pi i}{2}.$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int_0^{2\pi} F(\sin t, \cos t)\,dt$

Έστω F συνεχής και πραγματική συνάρτηση

Θέτουμε $z = x+iy = \cos t + i\sin t$, $t \in [0,2\pi]$.

όπου $x = \cos t = \dfrac{z+\bar{z}}{2} = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$

και $y = \sin t = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} = \dfrac{z-z^{-1}}{2i}$

Επίσης, $z = e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$

Διαφορίζοντας την σχέση αυτή, παίρνουμε:

$$dz = ie^{it}dt \Rightarrow dz = iz\,dt \Rightarrow dt = -i\frac{dz}{z}$$

Έτσι, το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} F(\sin t, \cos t)\,dt = \int_\gamma F\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}, \frac{z+z^{-1}}{2}\right)(-i)\frac{dz}{z}.$$

Παράδειγμα:

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\eta\mu t}$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $z = e^{it} = \cos t + i\sin t$, $t \in [0,2\pi]$

όπου $\sin t = \dfrac{z-z^{-1}}{2i}$ και $\cos t = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$

και $dt = -i\dfrac{dz}{z}$.

Αντικαθιστώντας στο παραπάνω ολοκλήρωμα παίρνουμε:

$$\oint_\gamma \frac{1}{3+\frac{z-z^{-1}}{i}}\cdot(-i)\frac{dz}{z} = \oint_\gamma \frac{1}{3i+z-\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{z}\,dz =$$

$$= \oint_\gamma \frac{1}{z^2+3iz-1}\,dz.$$

$$z^2+3iz-1=0$$

$$\Delta = -9-4(-1) = -5 < 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-3i \pm i\sqrt{5}}{2} \begin{cases} = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}i \\ = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}i \end{cases}$$

Επομένως, η συνάρτηση f είναι ολόμορφη στον τόπο $\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}i, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}i\right\}$ και

Τα σημεία z_1 και z_2 είναι πόλοι της f με πολλ/τα 1 ο καθένας τους

Αφού, μονάχα το $z_1 \in (\gamma)^\circ$ (ή $int(\gamma)$)

Τότε, $\operatorname{Res}_{z_1}(f) = \lim_{z\to z_0}\left((z-z_1)f(z)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}\,i}$

Επομένως, $\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_1}(f) = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{5}\,i} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΣΤΟ ∞

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Εάν $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, με $P(x), Q(x)$ να είναι πολυώνυμα για τα οποία $\deg(Q(x)) - \deg(P(x)) \geq 2$ και το $Q(x)$ δεν έχει πραγματική ρίζα, τότε:

$I = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z_1}(f) + \dots + \operatorname{Res}_{z_k}(f) \right)$, με $z_1, \dots, z_k$ πόλοι της μιγαδικής-ρητής συνάρτησης: $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ οι οποίοι βρίσκονται στο ημιεπίπεδο $\{z : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$, άλλα κανένας αυτών δεν ανήκει στον πραγματικό άξονα.

Παράδειγμα

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ και $J = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

ΛΥΣΗ

Έστω $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2 (z+i)^2}$ ολόμορφη $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$

με πόλους τα σημεία i και $-i$ πολ/τας 2 και για τα οποία μόνο το i $\{z : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$

Τότε, $I = 2\pi i \operatorname{Res}_i(f) = 2\pi i \cdot \lim_{z \to i} \left(\frac{d}{dz} \left((z-i)^2 \cdot f(z) \right) \right) =$

$= 2\pi i \cdot \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} (z+i)^{-2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$.

Για το J ολοκλήρωμα

Αφου η $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2}$ είναι άρτια

τότε $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\cdot\int_0^{\infty} f(x)dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{4}.$